Matrix · $A: m\times n$ Matrix,
$a_{i,j}$: m,i Spalte(n); n,j: Zeile(n)

· transponiert: A^T: Zeile ⇔ Spalte

· ... komplexe: A^H: A^T und Vorzeichenwechsel bei i ($\bar{A}^T$)

· symmetrisch / hermitesch
$A^T = A$, $A^H = A$
· (Elemente sind an der Diagonalen gespiegelt)

· Spur: Summe der Diag.-Elemente (Σa_{ii})

Skalarprodukt/inneres Prod.
Axiome / z.z.:
· $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$
· $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x,y\rangle$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$
· $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ bzw. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
· $\langle x,y\rangle \geq 0$
· $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Euklidisches Skalarprodukt:
$\mathbb{R}^n: x^T y = \langle x,y\rangle$
$\mathbb{C}^n: x^H y = \langle x,y\rangle$

Normen Axiome / z.z.:
· $\|A\|: \mathbb{E}^{m\times n} \to \mathbb{R}_+$
· $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$
· $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$
· $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

induzierte Norm (Vektor)
ein Skalarprodukt ist gegeben
$\Rightarrow \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$
... (Matrix)
eine Vektornorm ist gegeben
$\Rightarrow \|A\| := \sup_{\|x\|\neq 0} \|Ax\| / \|x\|$

Vektornormen
· 1-Norm: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots$
· 2-Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x^H x}$
· p-Norm: $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots)^{1/p}$
· ∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots\}$

Spektralnorm
$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

Winkel (Vektoren)
$\cos(\alpha) = \langle x,y\rangle / \|x\|\|y\|$

Orthogonale/Unitäre Matrix ($\mathbb{R}^{m\times n}$ / $\mathbb{C}^{m\times n}$)
$A^H A = I = A^T A$
A unitär ⇔ A^{-1} unitär
A, B unitär ⇒ AB unitär

Bei A unitär: $\|Ax\| = \|x\|$ (Längentreu)
$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle$ (Winkeltreu)

Rang # Zeilen ohne alles 0en nach Anwendung von Gauss.
$\text{rang}(A) \leq \min\{m,n\}$
$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$
$\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$
$\text{rang}(A\cdot B) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$

$\text{rang}(A) = n$ (voller Spaltenrang)
⇔ A injektiv
$\text{rang}(A) = m$ (voller Zeilenrang)
⇔ A surjektiv
$\text{rang}(A) = m = n$ (quadratische Mat.)
⇔ A bijektiv.
$\text{rang}(A) = n$ ⇔ A invertierbar

Matrix Rechnung
· $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
· $A+B = B+A$
· $A(B+C) = AB + AC$
· $(A+B)^H = A^H + B^H$
· $(AB)^H = B^H A^H$
· $AB \neq BA$ im Allgemeinen
· $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
· $(\alpha A^{-1}) = \alpha^{-1} A^{-1}$
· $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$

Rotations-Matrix
$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^2$

Determinante
· $\det A = \det A^T$
· $\det A^H = \overline{\det A}$
· $\det AB = \det A \cdot \det B$
· $\det \alpha A = \alpha^n \cdot \det A$ (A $m\times n$)
· $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ (Eigenwerte)
· 1 Zeile aus 0en ⇒ $\det A = 0$
· 2 gleiche Zeilen ⇒ $\det A = 0$
· $\det I = 1$
· $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$
· $\text{rang}(A) < n \Rightarrow \det(A) = 0$

· unverändert beim Addieren einer vielfachen einer Zeile zu einer anderen

· Zeilentausch führt zu Vorzeichenwechsel

· Eine Zeile mit α multipliziert → $\alpha \cdot \det(A)$

· Dreiecksmatrizen: $\det(A) =$ Produkt der Diagonalelemente

· $\det A \neq 0$ ⇔ $\text{rang } A = n$ ⇒ A regulär ⇔ A invertierbar

· $\det(A) = \det(LR) = \det(R) = \prod r_{ii}$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}_{\text{Kofaktor } K_{1,1}} \cdot a + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} \cdot b + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \cdot c$$

→ Summe der Indexe vom aktuellen Element: $a = (A)_{1,1}$

Eigenwerte / -Vektoren
$A: n\times n$
Zeigt x und Ax in die gleiche Richtung, so ist x Eigenvektor. Dieser wird um den Eigenwert λ gestreckt / gestaucht. ⇒ $Ax = \lambda x$
⇒ $A^\alpha x = \lambda^\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{Z}$

Singuläre Matrizen (nicht invertierbar) haben sicher $\lambda = 0$.

Berechnung
$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$

EV zu EW λ_0: $(A - \lambda_0 I)x_0 = 0$
lösen (x_0 berechnen (Gauss))
$x = 0$ kein EV!
EW von A finden:
$\det(A - I\lambda) = 0$ lösen
charakteristisches Polynom "$\chi(A)$"

Kontrollen
– Produkt der EWs ist gleich der Determinante (ohne Zeilentausch)

– Summe der EWs ist gleich der Spur von A (trace(A)).

Eigenraum: Zu einem gegebenen EW λ_0: $E_{\lambda_0} := \{v \in V \mid Av = \lambda_0 v\} \cup \{\vec{0}\}$
also alle Vektoren, die zu λ_0 gehören und der Nullvektor.

Spektrum: Menge aller EW:
$\sigma(A) := \{\lambda_0, \ldots, \lambda_n\}$

Vielfachheit:
· geometrische: $\dim E_{\lambda_0}$
$= \dim(\ker(A - I\lambda_0)) = n - \text{rang}(A - \lambda_0 I)$

· algebraische: Vielfachheit von λ_0 als Nullstelle von $\chi(A) = 0$

Eigenbasis: Basis aus EV, gibt es nicht zwingend. Existiert nur, wenn A diagonalisierbar. Es braucht n (A $n\times n$) unabhängige EV.

Vielfachheit ↔ Diagonalisierbar:
geom. = alg. Vielfachheit ⇔ A diagonalisierbar ⇔ Eigenbasis existiert ⇐ paarweise verschiedene EW. ⇐ alle EV sind zueinander unabhängig

EV Unabhängigkeit: EV zu verschiedenen EW sind lin. unabhängig.

---

oder: Eigenwertzerlegung
Spektralzerlegung geht nur, wenn Eigenbasis existiert.

$AV = \Lambda V$, $A = V\Lambda V^{-1}$

V besteht aus den EV als Spalten, die eine Basis bilden.
Λ hat in der Diagonalen die EW, sonst 0en.

$V^{-1} = \begin{pmatrix} -w_1^T- \\ \vdots \\ -w_n^T- \end{pmatrix}$ → $A = \sum_{k=1}^{n} v_k \lambda_k w_k^T$

$Av_k = v_k \lambda_k$, $w_k^T A = \lambda_k w_k^T$
w "linker Eigenvektor"

EW/EV symmetrische/hermitesch

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, symmetrisch bzw. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, hermitesch, so gilt:

- alle EW sind reell
- EV zu verschiedenen EW sind paarweise orthogonal in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$
- Es gibt eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren, die eine Matrix $U := (u_1, \dots, u_n)$ bilden.

⇝ $U^H A U = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Vektorräume

Körper mit Addition und skalarer Multiplikation

Axiome:

- $x + y = y + x$
- $(x+y)+z = x+(y+z)$
- $\emptyset \in V: x + \emptyset = x$
- $\forall x \in V \exists -x \in V$
- $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
- $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- $1 \cdot x = x$

Achtung: Nullvektor ist auch drin, prüfen

Unterraum Nicht leere Teilmenge $U \subseteq V$, sei $u, v \in U$ und $\alpha \in \mathbb{E}$, so muss für alle u, v, α gelten: $u + v \in \mathbb{E}$ und $\alpha u \in U$. Dies ist auch zu zeigen als Beweis

Erzeugendensystem: Spannt den Raum auf. Wird mit span{...} bezeichnet. Mit den Vektoren im span{} lassen sich alle Vektoren des Raums bilden.

Basis: linear unabhängiges Erzeugendensystem

Lineare Unabhängigkeit: Die Spalten von A sind unabhängig, wenn $Ax = 0$ nur die Lösung $x = 0$ hat. ($\Rightarrow \mathrm{rang}(A) = m = n$)

Zeigen das Vektoren Basis sind

1.) # Vektoren = $\dim(V)$
2.) lineare Unabhängigkeit

Triviale Unterräume: V selbst, Nullraum (nur der Nullvektor)

Dimension: $\dim(V)$ ist die Anzahl Basisvektoren für V

Fundamentale Unterräume

Lin. Abb. $A: X \to Y$, $A: m \times n$

Kern/Nullraum: $\ker(A)$, $\mathcal{N}(A)$, $K(A)$
Alle x für die $Ax = 0$ gilt.
$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{E}^n$ (Unterraum von $\mathbb{E}^n$).
$\dim(\mathcal{N}(A))$ = # freier Variablen in $\mathcal{R}$ (Gauss/LR) $= n - \mathrm{rang}(A)$.
Basis: $Ax = 0$ für unbekannte x lösen. Freie Variablen abwechslungsweise $=1$ setzen, restliche $=0$. All diese x sind Basisvektoren. Achtung: eine Unbekannte muss immer $=1$ gesetzt werden. Achtung: ist $\dim(\mathcal{N}(A)) = 0 \Rightarrow x = 0$ einzige Lösung ⇒ keine Basis.

Spaltenraum/Bild: $S(A)$, $\mathrm{im}(A)$, $C(A)$
Besteht aus allen Linearkombinationen der Spalten. Also alle b von $Ax = b$ für beliebige x. $S(A) \subseteq \mathbb{E}^m$.
$\dim(S(A)) = \mathrm{rang}(A)$. Basis: alle Spalten, die ein Pivot-Element enthalten (Spalten von A, Pivots ablesen aus $\mathcal{R}$).

Zeilenraum: $S(A^T)$, $C(A^T)$, $\mathrm{im}(A^T)$
$S(A^T) \subseteq \mathbb{E}^n$. $\dim(S(A^T)) = \mathrm{rang}(A)$.
Basis: Pivot-Zeilen, also Zeilen von A, die in $\mathcal{R}$ Pivotelemente enthalten.

Linkskern/-nullraum: $\ker(A^T)$, $\mathcal{N}(A^T)$, $K(A^T)$. $\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{E}^m$.
$\dim(\mathcal{N}(A^T)) = m - \mathrm{rang}(A)$. Basis: wie bei $\mathcal{N}(A)$, halt die y, die $A^T y = 0$ lösen. → siehe $\mathcal{N}(A)$ für Details.

Dimensionsformel:
$\underbrace{\dim X}_{=n} - \dim(\ker(A)) = \dim(\mathrm{im}(A))$

Orthogonalität: $S(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$
- $S(A) \perp \mathcal{N}(A^T)$

Abb. Eigenschaften:
- $F: X \to Y$ injektiv ⇔ $\mathrm{rang}(F) = \dim(X)$
- $F: X \to Y$ bijektiv ⇔ F Isomorphismus ⇔ $\mathrm{rang}(F) = \dim(X) = \dim(Y)$
- $F: X \to X$ bijektiv ⇔ Automorphismus ⇔ $\mathrm{rang}(F) = \dim(X)$, $\ker(F) = 0$
- $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$ lin. Abb.
  → $\mathrm{rang}(FG) \le \min\{\mathrm{rang}\, F, \mathrm{rang}\, G\}$
  → G injektiv ⇒ $\mathrm{rang}(GF) = \mathrm{rang}(F)$
  → F surjektiv ⇒ $\mathrm{rang}(GF) = \mathrm{rang}(G)$

Rang-Eigenschaften:
$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T) = \mathrm{rang}(A^H)$

Lineare Abbildung

Axiome/zu zeigen: $F: X \to Y$, $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in \mathbb{E}$ hat zu gelten:
- $F(x+y) = F(x) + F(y)$
- $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

Allgemeines:
Eine $m \times n$ Matrix A ist die Abbildung $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$
- F surjektiv ⇔ Epimorphismus
- F bijektiv ⇔ Isomorphismus
- $F: V \to V$ ⇔ Endomorphismus
- $F: V \to V$ bijektiv ⇔ Automorphismus

Lin. Abb. → Abb. Matrix Sei $F: X \to Y$, $X = \mathrm{span}\{b_1, \dots, b_n\}$, $Y = \mathrm{span}\{c_1, \dots, c_m\}$, so kann die Abb.-Matrix $A = (a_{kl})$ bestimmt werden:
$$F b_l = \sum_{k=1}^{m} a_{kl} c_k, \quad l = 1, \dots, n$$

Koordinatenabbildung $\kappa: X \to \mathbb{E}^n$
Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis für X, so lässt sich der Koordinatenvektor $\xi \in \mathbb{E}^n$ für $v \in X$ wie folgt berechnen: $v = \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k$, wobei ξ_i die i-te Komponente von ξ ist.

Kommutatives Diagramm
$$\begin{array}{ccc} x \in X & \xrightarrow{\quad F \quad} & y \in Y \\ \kappa_X \downarrow \uparrow \kappa_X^{-1} & & \kappa_Y \downarrow \uparrow \kappa_Y^{-1} \\ \xi \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow{\quad A \quad} & \eta \in \mathbb{E}^m \end{array}$$

ist $F = G \circ H$, B die Abb. Matrix für G und C die für H, so ist $A = CB$ (andere Reihenfolge)

Koordinatentransformation
Sei T_A^B die Koord.-transformations-Matrix, die einen Vektor a bezüglich Basis A in den Vektor b umwandelt, der zur Basis B ist.
Berechnung: Basisvektoren von A mittels der Basisvektoren von B darstellen und die Koordinaten als Spaltenvektoren in T_A^B eintragen. Dann gilt $b = T_A^B a$. $T_B^A = (T_A^B)^{-1}$
ETH-LinAlg: Teil neue Basis in alte umwandeln.

Abb. Matrix und Koord.trans.

$$\begin{array}{ccc} x \in X & \xrightarrow[\text{Lin. Abb.}]{F} & y \in Y \\ \kappa_X \downarrow \uparrow \kappa_X^{-1} & & \kappa_Y \downarrow \uparrow \kappa_Y^{-1} \\ \xi \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb. Mat ,,alte Basis''}]{A} & \eta \in \mathbb{E}^m \\ T^{-1} \downarrow \uparrow T & & S^{-1} \downarrow \uparrow S \\ \xi' \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb. Mat ,,neue Basis''}]{B} & \eta' \in \mathbb{E}^m \end{array}$$

T, S Transformationsmatrizen
κ_X, κ_Y Koordinaten Abb.

$\eta = A\xi = S\eta'$, $\xi = T\xi'$, $\eta' = B\xi'$
$B\xi' = \eta' = S^{-1}\eta = S^{-1}A\xi = S^{-1}AT\xi'$
$B = S^{-1}AT$, $A = SBT^{-1}$
beachte: man geht den Weg "rückwärts".
$\mathrm{rang}\, F = \mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\, B$

Orthogonalprojektion

Projektionen: Eine lin. Abb. P ist eine Projektion, wenn $P^2 = P$ ist. Es ist eine Orthogonale Projektion wenn $\ker(P) \perp \mathrm{im}(P)$.

Ist P ein Projektor so auch $(I-P)$: $\mathrm{im}(I-P) = \ker(P)$, $\ker(I-P) = \mathrm{im}(P)$

Orthogonalprojektion: Seien $a_1, \dots, a_n$ die Basisvektoren des Unterraums auf den wir orthogonal projezieren. Diese a_i sind als Spalten in A eingetragen. → wir projezieren also auf $\mathcal{R}(A)$.
$\Rightarrow P_A = A(A^H A)^{-1} A^H$.

~

Wenn $A = Q$ und Q besteht aus orthonormalen Basisvektoren, so gilt:
$\Rightarrow P_Q = QQ^H$.

~

Um nun x auf $\mathcal{R}(A)$ zu projezieren rechnen wir $P_A x$, wenn auf $\mathcal{R}(Q)$ $\Rightarrow P_Q x = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} q_j \langle q_j, x \rangle}_{\text{Spezialfall, da Q speziell ist}}$

Methode der kleinsten Quadrate

$Ax=y$ überbestimmt, keine Lösung. $r = y - Ax$ soll minimiert werden. A habe unabhängige Spalten. So gilt $x=(A^HA)^{-1}A^Hy$ bzw. $A^HAx = A^Hy$ (Normalengleichungen) Die 2. verwenden für Berechnungen, da einfacher.

Kleinstes-Quadrat-Problem

$Ax=y$ überbestimmt. Folgender Lösungsweg hat weniger Rundungsfehler wie den der Normalengleichungen.

1) $A=QR$ bestimmen
2) $Rx = Q^Hy$ per Rückwärtseinsetzen x bestimmen

QR-Zerlegung

$A = QR$, $A: m\times n$, $Q: m\times n$, $R: n\times n$ (↑ unabhängige Spalten)

Q-Spalten:

$q_1 = a_1/\|a_1\|$

bereits berechnete q_i

$\left.\begin{aligned} \tilde{q}_k &= a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j, a_k\rangle \\ q_k &= \tilde{q}_k / \|\tilde{q}_k\| \end{aligned}\right\} k=2,\dots,n$

$\Rightarrow$ Q enthält die orthonormierten Vektoren als Spalte.

R-Element:

$r_{11} = \|a_1\|$

$\left.\begin{aligned} r_{jk} &= \langle q_j, a_k\rangle, j=1,\dots,k-1 \\ r_{kk} &= \|\tilde{q}_k\| \end{aligned}\right\} k=2,\dots,n$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt Basis $a_1,\dots,a_n$ als orthonormale Basis $b_1,\dots,b_n$: $A=(a_1,\dots,a_n) \to$ QR-Zerlegung nur für Q (R ist egal). Spalten von Q sind die $b_1,\dots,b_n$

QR-allgemeines:

- $R = Q^HA$
- $Q^HQ = I_n = Q^TQ$

Singulärwertzerlegung

$A: m\times n$, $A = U\Sigma V^H$

Analysen:

- $\operatorname{rang}(A) = \#$ von Null verschiedener Diagonalelemente in Σ
- Σ enthält die ~~gewurzelten~~ EW von A^TA und AA^T ($\sigma_i^2 = \lambda_i$)
- V enthält die A^TA EW zu σ_i^2 (orthonormiert!)
- Ist A quadratisch, so sind die Diagonalelemente von Σ gleich dem Betrag der EW von A
- Spektralnorm von A: $\|A\|_2 = \sigma_1$, σ_1 ist 1. Element von A.
  $\|A^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$ (letztes nicht 0 Diagonalelement)
- U enthält die orthonormierten EV zu $\sigma_i^2 = \lambda_i$ EW für AA^T
- $V^T = V^{-1}$

→ orthonormale Basen:

$\mathcal{R}(A): \{u_1,\dots,u_r\}$ (im A)
$\mathcal{R}(A^H): \{v_1,\dots,v_r\}$ (im A^H)
$\mathcal{N}(A^H): \{u_{r+1},\dots,u_m\}$ (ker A^H)
$\mathcal{N}(A): \{v_{r+1},\dots,v_n\}$ (ker A)

Matrizen: A $m\times n$, U $m\times m$, Σ $m\times n$, V^T $n\times n$

Berechnung von Hand:

1) $B = A^TA$ berechnen
2) EW von B bekommen, diese EW λ_i nach Grösse sortieren: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$
3) Aus den EV zu den EW λ_i bilde wir eine orthonormale Basis mit v_i (Gram-Schmidt). Diese v_i bilden die Matrix $V = (v_1,\dots,v_n)$. Achtung wir brauchen V^H!
4) Singulärwerte von A sind $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. $\Rightarrow \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_i)$. Wenn nötig wird Σ auf $m\times n$ gebracht durch hinzufügen von 0en
5) Die Matrix $U = (u_1,\dots,u_m)$ besteht aus den Vektoren $u_i = 1/\sqrt{\lambda_i}\, Av_i$. (Da wir so nicht zwingend m Vektoren bekommen, muss man die fehlenden Vektoren mittels Gram-Schmidt finden. Dazu wendet man das Verfahren auf selbst zu findende unabhängige Vektoren an.) Alle optional Spalten von U sind orthonormal.
6) $\Rightarrow A = U\Sigma V^H$

Eigenschaften: $A^T = V\Sigma^TU^T$, ist A invertierbar: $A^{-1} = U\Sigma^{-1}V^T$

- $U = U^T$, $V^{-1} = V^T$

! Sparversion: Die im Punkt 5 zusätzlich gefundenen orthonormalvektoren sind oft nicht nötig. Man füllt dann die Matrix mit einem "Platzhalter" "*"

Definitheit

Eine reell symmetrische oder hermitische Matrix, die positiv definit ist, ist regulär

Eine symmetrische/hermitische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn sie eine Cholesky-Zerlegung hat, wobei $\tilde{R}$ eine Rechtsdreiecksmatrix ist mit positiven Diagonalelementen

Definition: Eine symmetrische $n\times n$ Matrix A ist positiv definit (spd), falls $x^TAx > 0\ \forall x\neq 0$.

$x^TAx \geq 0 \Rightarrow$ positiv semidefinit
$x^TAx < 0 \Rightarrow$ negativ definit
$x^TAx \leq 0 \Rightarrow$ negativ semidefinit

Mit EW's: $\forall$EW $> 0 \Rightarrow$ positiv definit,
$\forall$EW $\geq 0 \Rightarrow$ positiv semidefinit
$\forall$EW $< 0 \Rightarrow$ negativ definit
$\forall$EW $\leq 0 \Rightarrow$ negativ semidefinit
EW pos./negi. $\Rightarrow$ indefinit

Gauss-Verfahren: A ist positiv definit, wenn A $n\times n$ und symmetrisch ist und die n Pivotelemente positiv waren

Cholesky-Zerlegung $A = R^HR$

A ist $n\times n$ und "spd" (symmetrisch oder hermitisch und positiv definit).

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 & j<i \\ \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |r_{ki}|^2} & i=j \\ \frac{1}{r_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{r_{ki}}\, r_{kj}\right) & j>1 \end{cases}$$

Anwendung: spd testen: bricht ab, wenn nicht spd ist.

- LGS lösen, schneller als LR:
  a) $A = R^HR$
  b) $R^Hc = b$ nach c
  c) $Rx = c$ nach x

Kondition(szahl)

Sei A regulär und $\|\cdot\|$ eine gegebene Norm, so ist die Konditionszahl gegeben durch:

$\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$

Verilog

- Transponieren: A'
- Bereich: [start]:[steps]:[end]
- Betrag: abs(x)
- LR-Zerlegung: [L,U,P] = lu(A)
- Cholesky-Zerlegung: R = chol(A)
- EW-Zerlegung: [V,D] = eig(A) (V: EV in Spalten, D: EW in Diagonale)
- Determinante: det(A)
- $m\times n$ mit 1en: ones(m,n)
- $m\times n$ mit 0en: zeros(m,n)
- $I_{m\times n}$: eye(m,n)
- Matrixgrösse: [m,n] = size(A)
- Vektornorm: norm(x) = norm(x,2)
- p-Norm: norm(x,p)
- ∞-Norm: norm(x,inf)
- Inverse: inv(A)
- $Ax=b$ für x lösen: x = A\b
- Spur von A: sum(diag(A))
- Maximum: max(A)
- e^n: exp(n)
- $\ln(n)$: ln(n)
- $\log_{10}(n)$: log(n)

Semicolon am Ende der Operation, damit sie nicht ausgegeben wird.

Ungleich: ~=, Gleichheit: ==

```
for i=0:5        while (a<b)
  ...              ...
end              end
if (x==b)        A=[1,2;3,4]=(1 2; 3 4)
  ...            A(1,1) = 1
else if (x==a)   A(1,:) = (1 2)
  ...            A(:,1) = (1; 3)
else
  ...
end
```

QR-Zerlegung: [Q,R] = qr(A)

Inverses von Hand berechnen

Um das inverse von A ($n \times n$, regulär) zu berechnen überführt man die Matrix $(A \mid I_{n\times n})$ zur Matrix $(I \mid A^{-1})$ mittels Gauss-Jordan. Also zuerst Gauss auf A anwenden, dann untere Zeilen zu den oberen addieren, damit aus $A \to I$ wird. Im rechten Teil steht dann A^{-1}.

2×2 Fall: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Reguläre Matrix

Ist A regulär so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $\det(A) \neq 0$
- A^{-1} existiert
- Alle Zeilen-/Spaltenvektoren sind linear unabhängig
- 0 ist kein EW von A
- $\ker(A) = 0$
- $Ax = b$ besitzt 1 Lösung

$A = LU$ LSG lösen ($Ax = b$

$A = LU = LR$ berechnen,

a) $Lc = b$ für c berechnen

b) $Rx = c$ für $\underline{x}$ lösen

Anwendung EW-Zerlegung

Homogene DGL 1. Ordnung

Das folgende System homogener DGL 1. Ordnung soll gelöst werden:

$$y_1'(t) = a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + \dots + a_{1n} y_n(t)$$
$$\vdots$$
$$y_n'(t) = a_{n1} y_1(t) + a_{n2} y_2(t) + \dots + a_{nn} y_n(t)$$

a_{ik} ist konstant. $y_1(t) \equiv y_2(t) \equiv \dots \equiv 0$ ist eine triviale Lösung, da homogenes System. Seien $y_1(0) = \eta_1$, $y_2(0) = \eta_2, \dots$ n Anfangsbedingungen.

$$\Rightarrow A = (a_{ij}),\ y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},\ y_0 = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

so gilt: $\underbrace{y'(t) = Ay(t)}_{\text{entspricht unserem DGL System oben.}}$, $y(0) = y_0$

Ist A diagonalisierbar, so gilt $AV = V\Lambda$ womit wir $z(t) = V^{-1} y(t) \Rightarrow z'(t) = V^{-1} y'(t)$ definieren. Es gilt deshalb $z'(t) = \Lambda z(t)$ was dem folgenden System entspricht:

$$z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t)$$
$$\vdots$$
$$z_n'(t) = \lambda_n z_n(t),$$

was das entkoppelte System unseres ursprünglichen Systems ist. Die allgemeine Lösung ist:

$$z_1(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t}$$
$$\vdots$$
$$z_n(t) = \gamma_n e^{\lambda_n t}$$

wobei γ_i frei wählbare Konstanten sind.

$\Rightarrow e^{t\Lambda} := \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ und $c := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ somit gilt $z(t) = e^{t\Lambda} c$. Die allgemeine Lösung lautet also $y(t) = Vz(t) = Ve^{t\Lambda} c$. Um die spezielle Lösung zu berechnen nutzen wir aus: $z(0) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T = c$ ist und $y(0) = y_0$: $\to Vc = y_0$ nach c auflösen und dann in $y(t) = Ve^{t\Lambda} c$ einsetzen, ausrechnen, fertig, $y(t)$ ist nun bekannt.

Quadratische Formen und Hauptachsentransformation

Nachfolgend werden Funktionen ohne konstanten Term und ohne linearem Term betrachtet.

Beispielsweise: $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 24x_1x_2 + 11x_2^2$

Ellipse: $1 = x_1^2 \frac{1}{a^2} + x_2^2 \frac{1}{b^2}$, a und b Halbachsen.

nach oben geöffnete Parabel mit Halbparameter p:

$0 = x_1^2 - 2px_2$

$B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine symmetrische bilineare Form:

$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto B(x,y) :\equiv x^T A y \in \mathbb{R}$

wobei A eine reelle und symmetrische Matrix ist.

Die dazu definierte quadratische Form ist definiert durch: $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Q(x) :\equiv x^T A x \in \mathbb{R}$

(bei komplexen Zahlen x^H verwenden und A ist hermitesch)

Mittels Spektralzerlegung für symmetrische / hermitesche Matrizen erhalten wir $A = U \Lambda U^T$, $\tilde{x} :\equiv U^T x$ so gilt

$$Q(x) = \tilde{Q}(\tilde{x}) :\equiv \tilde{x}^T \Lambda \tilde{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{x}_k^2$$

nach der Koordinatentransformation $x \mapsto \tilde{x}$ liegen die Hauptachsen und Flächen der Figuren auf den Koordinatenachsen. (Hauptachsen-Transformation)

$\rightsquigarrow$ Trägheit: $(p, r-p, n-r)$ wobei p die Anzahl positiver EW ist und r der Rang von A ($n \times n$). ↙ Trippel (Tupel)

$\rightsquigarrow$ Signatur: $p - (r - p)$

Spektralnorm:

$$\|A\|_2 :\equiv \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_2 / \|x\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

Für $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ ist $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\omega}\,;\ \omega \text{ EW von } A^HA\}$. Ist A hermitesch, oder reell symmetrisch, so gilt: $A^HA = A^2$

$\Rightarrow \|A\|_2 = \max\{|\lambda|\,;\ \lambda \text{ EW von } A\}$.

Für unitäre / orthogonale A gilt $\|A\|_2 = 1$.

$$\|A^{-1}\|_2 = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{\omega}}\,;\ \omega \text{ EW von } A^HA\right\}$$
$$= 1/\min\{\sqrt{\omega}, \omega \text{ EW von } A^HA\}$$

ist A hermitesch / reell symmetrisch so gilt:

$$\|A^{-1}\|_2 = \max\{1/|\omega|\,;\ \omega \text{ EW von } A\}$$
$$= 1/\min\{|\omega|\,;\ \omega \text{ EW von } A\}$$

2-Norm-Konditionszahl:

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$