1 Determinante
1 Eigenwerte
1 Spur (Trace)
1 Mitternachtsformel
1 Matrix-Nummerierung
2 Vektorräume
2 Basiswechsel
2 Lineare Abbildungen
2 Kern, Bild, Rang
3 Abbildungsmatrix
3 Matrix Norm
3 Skalarprodukt (inneres Produkt)
4 Vektor Norm
4 Orthogonale Projektion
4 Orthogonale/Unitäre Matrix
4 LR-Zerlegung
4 Cholesky-Zerlegung
4 Kofaktoren
4 Gram-Schmidt ON-Verfahren
5 QR-Zerlegung
5 Kleinste-Quadrat-Problem
5 LGS
5 Fundamentale Unterräume
6 Matrizen
6 Eigenwerte (gleich wie 1)
7 Eigenwertzerlegung (Spektral)
7 Singulärwertzerlegung Eigenschaften
7 Polynome
7 Matlab
8 Definitheit
8 Singulärwertzerlegung von Hand
8 " – " ↔ Basen
8 Matrix Multiplikation
8 Gauss als Summenformel
8 Winkel bei Basistransformation (Basiswechsel)
8 Konditionszahl
9 Determinante bei Gauss/LR
9 Determinante und Kofaktoren
9 Determinante ↔ Rang ↔ EW
9 Komplexe Zahlen
9 Aufgaben
9 Trig. Funktionen

Determinante

$|a| = a$ $\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

- $\det A = \det A^T$
- $\det A^H = \overline{\det A}$
- $\det AB = \det A \cdot \det B$
- $\det \alpha A = \alpha^n \cdot \det A$
- $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ (Eigenw.)
- 1 Zeile aus $\emptyset \Rightarrow \det A = 0$
- 2 gleiche Zeilen $\Rightarrow \det A = 0$
- $\det I = 1$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- rang $A < n \Rightarrow \det A = 0$
- bleibt unverändert, wenn einer Zeile ein Vielfaches einer anderen dazuaddiert wird.
- Dreiecks-Matrix $\Rightarrow \det A =$ Produkt der Diagonalelementen.
- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ rang $A = n$ $\Leftrightarrow A$ regulär
- Werden zwei Zeilen vertauscht, so wechselt das Vorzeichen von $\det A$.
- Wird eine Zeile um α multipliziert so ist der neue Wert $\alpha(\det A)$
- ~ gilt auch für Spalten tauschen / addieren / multiplizieren

Det. + LSG:

äquivalente Aussagen für $n \times n$-Matrizen:

- A invertierbar
- $\det A \neq 0$
- rang $A = n$
- $Ax = b \ \forall b$ lösbar
- $Ax = b$ eindeutig
- $Ax = \emptyset$ nur triviale Lösung $x = 0$

Eigenwerte

$Ax = \lambda x \quad (x \neq \emptyset, A \in \mathbb{E}^{n \times n})$

λ: Eigenwert ("EW")

x: Eigenvektor ("EV")

EW berechnen:

$(A - \lambda I)x = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I) = 0}_{\text{char. Polynom}}$

berechnen

EV zu λ_i:

$\underbrace{(A - \lambda_i I)}_{\text{"}A\text{"}} \underbrace{x}_{\text{"}x\text{"}} = \underbrace{0}_{\text{"}b\text{"}}$

EW zu x_i (EV):

$Ax_i = \lambda x_i$

Eigenraum zu λ_i:

$E_{\lambda_i} := \{ v \in V : Av = \lambda v \} \cup \{ \emptyset \}$

geometrische Vielfachheit:

$\dim E_{\lambda_i} = \dim(\ker(A - \lambda I))$

$= n - \text{rang}(A - \lambda I)$

algebraische Vielfachheit:

Vielfachheit von λ_i als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Vielfachheiten:

geom. = algebr. $\Leftrightarrow$ Matrix diagonalisierbar $\Leftarrow$ paarweise verschiedene EW

Eigenbasis: Basis aus EV

Matrizen A und B ähnlich:

A, B besitzen gleiche Spur, det, EW.

Spur: Summe der Diagonal-Elemente (Spur) (Trace)

Eigenwertzerlegung (Spektralzerlegung)

$AV = V\Lambda \qquad A = V \Lambda V^{-1}$

V: EV als Spalten

Λ: EW in der Diagonalen

(Λ ist ähnlich zu A)

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Λ Diagonalmatrix

(geht nicht immer!)

Symmetrische / Hermitische Matrizen: es gilt:

- Alle Eigenwerte sind reell
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal in $\mathbb{C}^n$
- Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren $u_1, \dots, u_n$ von A
- für unitäre Matrix $U := (u_1, \dots, u_n)$ gilt $U^H A U = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

~ bzw. in / des $\mathbb{R}^n$

Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Matrix-Nummerierung

A: $m \times n$: m Zeilen, n Spalten

a_{ij}: i-te Zeile, j-Spalte

$\rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

Vektorräume

Körper mit Vektoraddition und skalarer Multiplikation

Axiome: V1) $x+y=y+x$

V2) $(x+y)+z = x+(y+z)$

V3) $\emptyset \in V: x+\emptyset = x$

V4) $\forall x \in V \; \exists -x \in V$

V5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

V6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

V7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

V8) $1x = x$

Unterraum: nicht leeres $U \subseteq V$ und $\forall x,y \in U$ und $\alpha \in E$: $x+y \in U$, $\alpha x \in U$

Erzeugendensystem: spannt den Raum auf. $\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$

Basis: linear unabhängiges Erzeugendensystem

Lineare Unabhängigkeit:

$Ax = 0$ hat nur die Lösung $x = \emptyset$.

Zeigen, dass Basis:

1. #Vektoren = Dimension von V
2. lineare Unabhängigkeit

Zeigen, dass Vektorraum:

Axiome zeigen (V1-V8):

Triviale Unterräume:

- V ist Unterraum von V
- "Nullraum", nur mit dem $\emptyset$-Vektor enthalten. (hat keine Basis, $\dim(\{\emptyset\})=0$)

Basiswechsel

Wechsel von Basis B zur Basis B'. Jeder Basisvektor von B' lässt sich als Linearkombination von Basisvektoren von B darstellen (und anders rum)

$\Rightarrow b'_k = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ik} \cdot b_i$

$\Rightarrow T = (\tau_{ik})$ (Matrix)

$B' = BT \qquad \xi' = T^{-1} \cdot \xi$

$B = B'T^{-1} \qquad \xi = T \cdot \xi'$

$\xi \in E^n$: Koordinatenvektor eines beliebigen Vektors $x \in V$ bezüglich alter Basis B. ξ': ... bezüglich neuer Basis B'.

$\sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i = x = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i b'_i$

$T = (\tau_{ik})$ ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels. In der k-ten Kolonne von T stehen die Koordinaten des k-ten neuen Basisvektors bezüglich der alten Basis.

Lineare Abbildungen

Voraussetzung (zu zeigen)

(1) $F(x+\tilde{x}) = F(x) + F(\tilde{x})$

(2) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

$\Rightarrow F(\alpha x + \beta\tilde{x}) = \alpha F(x) + \beta F(\tilde{x})$

Affine Abbildung

Lineare Abbildung mit konstanter Verschiebung

$H: X \to y_0 + Y$, $x \mapsto y_0 + Fx$

Zusammengesetzt: $G \circ F(x) = G(F(x)) = GFx$ ist wiederum linear

→ Kern, Bild, Rang

Kern: Menge aller Vektoren, die auf Null abgebildet werden:

$\ker(A) := \{x \in V^n \mid Ax = 0\}$

Bild: Menge aller Bildvektoren:

$\text{Bild}(A) = \text{Im}(A) := \{y \in V^m \mid \exists x \in V^n: y = Ax\}$

Unterraum:

- $\ker(A)$ ist Unterraum von V^n
- $\text{Im}(A)$ ist Unterraum von V^m

Dimension:

- $\dim \ker(A) + \dim \text{Im}(A) = \dim V^n$
- $\dim \text{Im}\, A = \dim \text{Im}\, A^T$
- $\dim \text{Im}\, A = \text{rang}\, A$
- $\dim \ker A = \#$ freier Parameter
- $\dim V^n - \dim \ker(F) = \dim \text{Im}(F)$

Rang: A $m \times n$ Matrix:

- # Pivotelemente nach Gauss
- $= \dim \text{Im}(A)$
- ~~C(A)~~ $\dim C(A) = \dim C(A^T)$

→

A als lineare Abb.:

- $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{R}(A)$
- $\ker(A) = \mathcal{N}(A)$

- $A: X \to Y$ injektiv
  $\Leftrightarrow$ rang $A = \dim X$
- $A: X \to Y$ bijektiv
  (Isomorphismus)
  $\Leftrightarrow$ rang $A = \dim X = \dim Y$
- $A: X \to X$ bijektiv
  (Automorphismus)
  $\Leftrightarrow$ rang $A = \dim X \Leftrightarrow$
  $\ker A = \emptyset$

Basen Kern:

$Ax = 0$ lösen, alle x sind Basen. für freie Parameter 0,1 einsetzen abwechslungsweise

Basen Bild:

A auf Zeilenstufenform bringen → Kolonnen sind Basisvektoren, bei denen Pivotelement $\neq 0$.

(Spalten der Ursprungsmatrix, Pivotelemente aus der Zeilenstufen-Matrix)

Abbildungsmatrix bei Koordinatentransformation

$F: X \to Y$ lineare Abbildung

$A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ entsprechende Abbildungsmatrix

$T: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ Transformationsmatrix im $\mathbb{E}^n$

$S: \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m$ ... im $\mathbb{E}^m$

$$
\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, shift left, "K_X"] \arrow[d, "F"', "\text{lin. Abb.}"] & \xi \in \mathbb{E}^n \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "T^{-1}"] \arrow[d, "A", "\text{Abb. matrix}"'] & \xi' \in \mathbb{E}^n \arrow[l, shift left, "T"] \arrow[d, "B", "\text{Abb. matrix}"'] \\
y \in Y \arrow[r, shift left, "K_Y"] & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "S^{-1}"] & \eta' \in \mathbb{E}^m \arrow[l, shift left, "S"]
\end{tikzcd}
$$

(Koordinatenabbildung bezüglich alte Basen)

$\eta \in \mathbb{E}^m$ (Koordinaten bezüglich „alten" Basen)

(Koordinatentransformation)

$\eta' \in \mathbb{E}^m$ (Koordinaten bezüglich „neuen" Basen)

$\Rightarrow y = Fx,\ \eta = A\xi,\ \xi = T\xi',\ \eta = S\eta',\ \eta' = B\xi'$

$\Rightarrow B = S^{-1}AT,\ A = SBT^{-1}$, rang F = rang A = rang B

Norm einer Matrix

Def.: $\|\cdot\|: \mathbb{E}^{n\times n} \to \mathbb{R}$

- positiv definit: $\|F\| \geq 0$, $\|F\| = 0 \Rightarrow F = 0$
- homogen: $\|\alpha F\| = |\alpha|\,\|F\|$
- Δ-Ungleichung: $\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|$

↑ zu zeigen

- o-Abb.: $\|F \circ G\| \leq \|F\|\,\|G\|$

induzierte Matrixnorm:

$\|A\|$ ist induzierte Matrixnorm, falls eine Vektornorm $\|x\|$ gegeben ist:

$$\|A\| :\equiv \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Spektralnorm / 2-Norm

induziert durch Vektor 2-Norm (Euklidische)

$$\|A\|_2 :\equiv \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Skalarprodukt (Vektoren)
(„inneres Produkt")

Eigenschaften:

- linear im 2. Vektor:
  $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
  $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
- symmetrisch:
  $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
- positiv definit:
  $\langle x, x\rangle \geq 0$
  $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

- $x, y, w \in \mathbb{R}^n$:
  $\langle w + x, y\rangle = \langle w, y\rangle + \langle x, y\rangle$
  $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

- $x, y, w \in \mathbb{C}^n$:
  $\langle w + x, y\rangle = \langle w, y\rangle + \langle x, y\rangle$
  $\langle \alpha x, y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$

euklidisches Skalarprodukt:

$\mathbb{R}^n: x^T y = \langle x, y\rangle$

$\mathbb{C}^n: x^H y = \langle x, y\rangle$

$\to \mathbb{R}^n: \sum^n x_k y_k$

$\to \mathbb{C}^n: \sum^n \overline{x_k}\, y_k$

Ungleichungen:

Vektor-Norm

- Schwarz'sche:
  $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
- Δ: $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Winkel: $\measuredangle(x,y) = \alpha$

- $\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\alpha$
- $\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$
- im $\mathbb{C}^n$: $\cos\alpha = \frac{\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

3 3

Vektor Norm

Axiome:

- $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \emptyset$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Induzierte Norm

$\|x\| := \sqrt{\langle x, y \rangle}$ ist die durch das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ induzierte Norm

Einheitsvektor

x ist Einheitsvektor, wenn $\|x\| = 1$

Bekannte Normen:

- 1-norm (Manhattan):

  $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

- 2-norm (Euklid):

  $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^H \cdot x}$

- p-Norm: $\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$

- ∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max \{ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n| \}$

Orthogonale Projektion

$P_y(x) = \frac{1}{\|y\|^2} \cdot y y^H x = u u^H x$ wobei $u = \frac{y}{\|y\|}$

Projiziert x auf Gerade y (Punkt auf y).

Orthogonale / Unitäre Matrizen

$\mathbb{R}$: orthogonal, $\mathbb{C}$: unitär

$A^H A = I \Rightarrow A^{-1} = A^H$

Eigenschaften:

A unitär $\Leftrightarrow$ A^{-1} unitär

A, B unitär $\Leftrightarrow$ AB unitär

mit A abbilden:

$\|Ax\| = \|x\|$ (längentreu)

$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ (Winkeltreu)

LR-Zerlegung

Wie Gauss, zusätzlich werden in einer Matrix L die Faktoren notiert, mit denen die eine Zeile von der Anderen subtrahiert ~~...~~ wurde. L untere linke Dreiecksmatrix. L_{ii} (Diagonale) $= 1$. Alles rechts von der Diagonalen in $L = 0$.

Es gilt: $PA = LR$

P ist Anfangs I und zeichnet Zeilenwechsel auf (Permutationsmatrix)

R ist die obere Rechtsdreiecksmatrix mit der Zeilenstufenform am Ende des Gauss.

LGS lösen:

$Ax = b$

$(P)A = LR$ lösen $\rightarrow L, R$

$Ly = (P)b$ lösen $\rightarrow y$

$Rx = y$ lösen $\rightarrow \underline{\underline{x}}$

(Vorteil von LR: b wird nicht verändert $\rightarrow$ einfach mehrere b zu verwenden)

Cholesky-Zerlegung

A muss "spd" sein (symmetrisch und positiv definit)

$A = R^H R$

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 & j < i \\ \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |r_{ki}|^2} & i = j \\ \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{r_{ki}} \, r_{kj} \right) & j > 1 \end{cases}$$

Anwendung:

- spd-Test (bricht ab, wenn nicht spd ist)
- LGS lösen, schneller als LR:

  $A = R^H R \rightarrow R, R^H$

  $R^H c = b$ nach $c \rightarrow c$

  $Rx = c$ nach $x \rightarrow \underline{\underline{x}}$

Kofaktoren

A $n \times n$ Matrix

Kofaktor $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

wobei M_{ij} die Determinante ist von A, wenn man die i-te Zeile und j-Spalte streicht.

Kofaktormatrix besteht aus den $\tilde{a}_{ij}$.

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

Macht aus endlich vielen linear unabhängigen Vektoren $\{a_1, \ldots, a_n\}$ orthonormale $\{b_1, \ldots, b_n\}$ (paarweise orthogonal)

$\operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\} = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$

Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis, so ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ die Orthonormalbasis.

$b_1 :\equiv \frac{a_1}{\|a_1\|}$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{b}_k &:\equiv a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle b_j \\ b_k &:\equiv \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|} \end{aligned}\right\} k = \{2, 3, \ldots\}$$

QR-Zerlegung

1. Gram-Schmidt ausführen (leicht modifiziert) wobei wir statt b_i, q_i schreiben:

$$q_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q}_k &:= a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j, a_k \rangle \\ q_k &:= \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|} \end{aligned}\right\} k = \{2, 3, \dots\}$$

Matrix Q enthält die orthonormierten Spalten zu den a_i Spaltenvektoren.

Es gilt $Q^H Q = I_n$ für $\mathbb{C}$ bzw. $Q^T Q = I_n$ für $\mathbb{R}$

Falls $m = n$: Q unitär/orthogonal $\Rightarrow QQ^H = I_n$ bzw. $QQ^T = I_n$

2. R-Matrix aufbauen:

$$r_{11} :\equiv \|a_1\|$$

$$\left.\begin{aligned} r_{jk} &:\equiv \langle q_j, a_k \rangle, \quad j = 1, \dots, k-1 \\ r_{kk} &:\equiv \|\tilde{q}_k\| \end{aligned}\right\} k = 2, \dots, n$$

$$r_{jk} :\equiv 0, \quad j = k+1, \dots, n$$

$\Rightarrow A = QR$

$A = (a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n)$

$Q = (q_1 \; q_2 \; \cdots \; q_n)$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Kleinstes-Quadrat-Problem

1. QR-Zerlegung machen

$\Rightarrow Rx = Q^H y$

x ist die Lösung des Problems für den Vektor y.

($Ax = b \Rightarrow A \hat{=} R, x \hat{=} x, b \hat{=} Q^H y$)

LGS:

Rang: # linear unabhängiger Vektoren. Entspricht # Zeilen ~~mit~~ $\neq 0$ in Zeilenstufenform

alle Vektoren unabhängig $\Rightarrow$ Rang vollständig $\Rightarrow$ Matrix regulär (sonst singulär)

Homogen: rechte Seite (b) = 0: $Ax = \emptyset$

Fundamentale Unterräume

~~Aus~~ A $m \times n$, rang $A = r$

Nullraum $\mathcal{N}(A)$: *

$\mathcal{N}(A) \subset \mathbb{E}^n$

$\dim \mathcal{N}(A) = n - r$

$\mathcal{N}(A) := \{y \in \mathbb{E}^n \mid Ay = \emptyset\}$

*(A^T für $\mathbb{C}$ durch A^H ersetzen)

linker Nullraum $\mathcal{N}(A^T)$: *

$\mathcal{N}(A^T) \subset \mathbb{E}^m$

$\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$

$\mathcal{N}(A^T) := \{y \in \mathbb{E}^m \mid A^T y = \emptyset\}$

Spaltenraum $\mathcal{C}(A) / \mathcal{R}(A^T)$ *

$\mathcal{C}(A) \subset \mathbb{E}^m$

$\dim \mathcal{C}(A) = r$

$\mathcal{C}(A) := \{y \in \mathbb{E}^m \mid y = Ax \;\forall x\}$

entspricht bei ~~mit~~ uns $\mathcal{R}(A^T)$

Zeilenraum $\mathcal{C}(A^T) / \mathcal{R}(A)$ *

$\mathcal{R}(A) \subset \mathbb{E}^n$

$\dim \mathcal{R}(A) = r$

$\mathcal{R}(A) := \{y \in \mathbb{E}^n \mid A^T x = y \;\forall x\}$

entspricht $\mathcal{C}(A^T)$

Eigenschaften: *

Spannen es auf!

$\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T) = \mathbb{E}^n$

$\mathcal{C}(A) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathbb{E}^n$

- $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{E}^m$
- $\mathcal{C}(A) \perp \mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{E}^n$
- $\mathcal{C}(A)$ entspricht $\mathrm{Im}(A)$
- $\mathcal{N}(A)$ entspricht $\ker(A)$
- $\mathcal{R}(A)$ " – " $\mathrm{Im}(A^T)$
- $\mathcal{N}(A^T)$ " – " $\ker(A^T)$

Basen:

- $\mathcal{C}(A)$: Spalten von A mit Pivot Elementen

• $\mathcal{R}(A)$: A in Zeilenstufenform bringen (= R) und nun sind die ersten r Zeilen von $\mathcal{R}$ eine Basis für $\mathcal{R}(A)$.

• $\mathcal{N}(A^T)$: → Basis $\ker(A^T)$
• $\mathcal{N}(A)$: → Basis $\ker(A)$

Basen bezogen auf Singulärwertzerlegung: *

Zerlegung: $A = U \Sigma V^T$

• $\mathcal{C}(A)$: ersten r Spalten von U
• $\mathcal{N}(A)$: letzten (n−r) Spalten von V
• $\mathcal{R}(A)$: ersten r Zeilen von V^T
• $\mathcal{N}(A^T)$: letzten (m−r) Zeilen von U^T

Matrizen:

Mögliche Eigenschaften:

• symmetrisch: $A = A^T$ (m = n)
• hermitisch: $A = A^H$
• A, B kommutieren: $AB = BA$

Transponiert:

• in $\mathbb{R}^{m \times n}$: "A^T": Zeilen werden Spalten
• in $\mathbb{C}^{m \times n}$: auch, aber auch imaginärer Teil bekommt Vorzeichenwechsel:

$$\begin{pmatrix} 2+i & 3-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 3+i & 1+i \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

• $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
• $A + B = B + A$
• $A(B + C) = AB + AC$
• $(A+B)^H = A^H + B^H$
• $(AB)^H = B^H A^H$
• $AB \neq BA$ im allgemeinen
• $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
• $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1}$
• $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$

Rotations-Matrix

• in $\mathbb{R}^2$:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

• in $\mathbb{R}^3$:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(α kann auch aus 2 Winkeln bestehen: $\alpha = \beta + \gamma$)

Matrix × Vektor

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} =$$

$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$

Inverses

A^{-1} aus A berechnen:

Matrix aufbauen:

$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$ Gauss "unter" und "hoch" anwenden bis links I ist und rechts A^{-1}

$\left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$

• 2 × 2 Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A \right)$

ad − bc ≠ 0 damit invertierbar ist.

Eigenwerte

$Ax = \lambda x$ ($x \neq 0$, $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$)

λ: Eigenwert (EW)

x: Eigenvektor (EV)

EW berechnen

$(A - \lambda I) x = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\text{charakteristisches Polynom}} = 0$

EV zu EW λ_i:

$\underbrace{(A - \lambda_i I)}_{\text{"A" Gauss}} x = 0$

Eigenraum:

$E_\lambda := \{ v \in V : Av = \lambda v \} \cup \{0\}$

(für ein bestimmten EW)

geometrische Vielfachheit entspricht $\dim(E_\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I)) = n - \text{rang}(A - \lambda I)$

algebraische Vielfachheit

Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms

Vielfachheiten:

geom. = algbr. ⇔ Matrix diagonalisierbar ⇔ paarweise verschiedene EW. ⇒ Eigenbasis existiert für A

Eigenbasis: Basis aus EV

A, B "ähnlich": A, B gleiche Spur (Trace), det und EW

Eigenwertzerlegung (Spektralzerlegung)

Ziel: $AV = V\Lambda$

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

→ funktioniert nicht immer. Geometrische und algebraische Vielfachheit müssen gleich sein. Dann ist A diagonalisierbar und es gibt Λ.

- $V :\equiv (v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n)$
  $v_1, \dots, v_n$ sind die Eigenbasisvektoren.
- Λ ist Diagonalmatrix mit EW als Diagonal-Elemente.

Singulärwertzerlegung

- $A = U \Sigma V^T$
- Σ enthält die $EW^{1/2}$:
  $\Sigma = \sqrt{\Lambda}$ $(\sigma_i = \sqrt{\lambda_i})$
- $A^T = V \Sigma^T U^T$

↳ Vorgehen Berechnung S. 8

- wenn A invertierbar:
  $A^{-1} = U \Sigma^{-1} V^T$
- $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ Diagonalelemente von Σ:
  - 2-Norm: $\sigma_1 = \|A\|_2$
    (= grösstes Diagonalelement in Σ)
  - A invertierbar:
    $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$
    (σ_n: kleinstes Diagonalelement von Σ)

Rang:

EW $\neq 0$ ⇒ entspricht der Anzahl Diagonalelemente in Σ die nicht gleich 0 sind.

Polynome:

- P_m ist Vektorraum aller Polynome mit Grad $\leq m$.
- $\dim P_m = m+1$
- Monome: $1, t, t^2, \dots$

Matlab

Transponieren: A^T: A'
Bereich: x = Anfang : Schritte : Ende
Betrag: abs(x)
LR-Zerlegung: [L,U,P] = lu(A)
Cholesky-Zerlegung: R = chol(A)
EW-Zerlegung: [V,D] = eig(A)
Determinante: det(A)
nxn Matrix mit 1en: ones(n)
" – " mit 0en: zeros(n)
nxn Identität/Einheitsmatrix: eye(n)
mxn: Grösse Matrix: [m,n] = size(A)
Vektornorm: norm(p,x)
p-Norm: norm(x,p)
∞-Norm: norm(x,inf)
oberes/unteres Dreieck inkl. Diagonale: triu(A)/tril(A)
Inverses: ~~inv~~ inv(A)
Ax = b Lösung: x = A\b
Diagonale A: diag(A)
Spur von A: sum(diag(A))
Plot: plot(x,y)

Maximum: max(A)
m×n ones(): ones(m,n)
m×n zeros(): zeros(m,n)
`exp(n)`: e^n
`log(n)`: ln(n)
`log10(n)`: log(n)

Semicolon am Schluss, damit nicht ausgegeben wird!

Ungleichsoperator: ~= | Gleichheit: ==

```
for i = 0:5
...
end
```

```
while (a < A)
...
end
```

```
if (x == b)
...
elseif (x == a)
...
else
...
end
```

```
function [ret1, ret2] = name(arg)
...
return; %optional
...
end % optional
```

`A = [1, 2; 3, 4]` $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
`A(1,1)` = 1

A(1,:) = (1 2)
A(:,1) = $\binom{1}{3}$

Operationen wie +, -, ... operieren Elementweise auf Vektoren (Matrizen)

x .* y : Elementweise multiplizieren:
[1,2] .* [2,3] = [2,6]

Zeilenvektor mit k Zahlen mit gleichen Abständen von a bis b: z = linspace(a,b,k)

Definitheit

- Eine reelle oder hermitesche Matrix, die positiv definit ist, ist regulär.
- Eine reelle oder hermitesche Matrix ist genau dann positiv definit, wenn sie eine Cholesky-Zerlegung hat, worin R eine Rechtsdreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen ist.

Definition: Eine symmetrische $n \times n$ Matrix ist positiv definit (spd), falls

$x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$ (bzw. $x^H A x > 0$)

" — " $\geq$ " — " positiv semidefinit

" — " < 0 negativ definit

" — " ≤ 0 negativ semidefinit

Mit EWen

$\forall$ EW > 0 : positiv definit
$\forall$ EW ≥ 0 : positiv semidefinit
$\forall$ EW < 0 : negativ definit
$\forall$ EW ≤ 0 : negativ semidefinit
EW positiv und negativ: indefinit

Bei Gauss-Verfahren: führt man Gauss auf eine quadratische und symmetrische Matrix aus, ohne Zeilenvertauschung, so ist die Matrix positiv definit, wenn n positive Pivotelemente verwendet werden.

Singulärwertzerlegung von Hand

1.) $B = A^T A$ berechnen ($n \times n$ Matrix)

2.) EW von B berechnen. Diese sind nicht-negativ und werden absteigend sortiert und auch so nummeriert: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq 0$

3.) $v_1, \dots, v_n$ Eigenvektoren zu den EW berechnen. Diese müssen orthonormal sein. $\Rightarrow V = (v_1, \dots, v_n)$, $V^T = V^{-1}$ (orthogonale Matrix)

4.) Die Singulärwerte von A sind $s_i = \sqrt{\lambda_i}$. Matrix $S := (s_{ij})$ ist eine Diagonalmatrix, also $i \neq j \Rightarrow s_{ij} = 0$. Gleiche Form wie A ($n \times m$). (Singulärwerte sind in der Diagonalen)

5.) Für $i \leq k$ wird definiert: $\vec{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A \vec{v}_i$. Diese Vektoren bilden eine orthonormale Basis und fassen sie in $U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ zusammen

$\Rightarrow A = U S V^T \quad (S = \Sigma)$

Singulärwertzerlegung $\leftrightarrow$ Basen

- $\{u_1, \dots, u_r\}$ Basis von $Im(A) \equiv \mathcal{R}(A)$
- $\{v_1, \dots, v_r\}$ Basis von $Im(A^H) \equiv \mathcal{R}(A^H)$
- $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ Basis von $Ker(A^H) \equiv \mathcal{N}(A^H)$
- $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ Basis von $Ker(A) \equiv \mathcal{N}(A)$

$\rightarrow$ alles orthonormale Basen!

Matrix Multiplikation:

$(a\,b)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Gauss als Summenformel:

$x_j = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} \, x_k \right)$

eindeutig für $a_{jj} \neq 0$

Winkel bei Basistransformation:

Ist die Basis orthogonal bezüglich gegebenem Skalarprodukt, so bleibt der Winkel bestehen, auch nach einer Koordinaten-/Basis-transformation ("Parsevalsche Formel")

Konditionszahl:

$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$

(beliebige Norm, reguläre Matrix A)

$\Rightarrow$ Konditionszahl von 2-er-Norm:

$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2$

Determinante bei Gauss / LR

Determinante entspricht dem Produkt der oberen Dreiecksmatrix ihren Diagonalen Elementen. Bei LR-Zerlegung entspricht das den Diagonalelementen von R.

Wurden Zeilen k-mal vertauscht, so muss noch mit $(-1)^k$ multipliziert werden!

Determinante und Kofaktoren

A: Matrix, C Kofaktormatrix für A.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{1,j}\, C_{1,j}$$

Determinante ↔ Rang ↔ EW

wenn ~~ein~~ $\det(A)=0$, so ist der Rang von $A < m$ und daraus folgt, dass ein EW $\lambda_k = 0$ ist.

Komplexe Zahlen

- $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
- $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$
- $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$
- $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$
- $z = a+ib$

$\bar{z} = a-ib$

Aufgaben ~~1~~ 1

Rekursive Folge:

Aufgabe:

$F := \{ (a_n)_{n\geq 1} : a_n \in \mathbb{C} \land a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für } n \geq 1 \}$

und $g: F \to \mathbb{C}^2$, $g((a_n)_{n\geq 1}) = (a_1, a_2)$

a) $r, s \in \mathbb{C}$ finden, so dass $a_n := r^n$, $b_n := s^n$ Folgen in F sind.

→ Lösung: Sei $a_n = t^n$, $t \in \mathbb{C}$. Soll $(a_n)_{n\geq 1}$ in F sein, muss $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \; \forall n$ gelten. D.h. $t^{n+2} = t^{n+1} + t^n$, oder: $0 = t^n(t^2 - t - 1)$. Somit muss $t = 0$ sein oder $t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$\Rightarrow r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

~~b)~~ $\|Ax-b\|_W$ minimieren

Aufgabe: $\langle x, y\rangle_W = x^T W y$, W gegeben (positiv definite Matrix).

Finden Sie Vektor x, der $\|Ax-b\|_W$ minimiert. A, b gegeben. Methode des kleinsten Quadrates verwenden

Lösung: Lässt sich auch in der 2-Norm lösen: $x^* = \arg\min_x \|Ax-b\|_W^2 =$ (R aus vorheriger Aufgabe) $\arg\min_x \|R(Ax-b)\|_2^2 = \arg\min_x \|\tilde{A}x - \tilde{b}\|_2^2$

wobei $\tilde{A} = RA$ und $\tilde{b} = Rb$. Dann QR auf $\tilde{A} = \tilde{Q}\tilde{R}$ und dann $\tilde{Q}^T\tilde{b}$ berechnen. Rückwärts einsetzen in $\tilde{R}x$, was x^* liefert.

$\|x\|_W \to \|x\|_2$ umformen

Aufgabe: Induzierte Norm $\|x\|_W$

Lösung: $\|x\|_W = \sqrt{x^T W x}$

Aufgabe: $\|w\|_W$ mittels Cholesky-Zerlegung als 2-Norm darstellen.

Zerlegung: $W = R^T R$

Lösung: $\|x\|_W^2 = x^T W x = x^T R^T R x = \|Rx\|_2^2$

Trig. Funktionen:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $\cos(90° \pm x) = \mp \sin(x)$
- $\sin(x \pm 90°) = \cos(x)$
- $\sin(180° \pm x) = \mp \sin(x)$
- $\cos(180° \pm x) = -\cos(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
-